10. Síkbarajzolhatóság

**Síkbarajzolhatóság:**

* A G gráf síkbarajzolható, ha van G-nek olyan diagrammja, amiben az élek csak végpontokban metszik egymást.
* A G síkbarajzolható (sr), ha létezik síkbarajzolása
* A síkbarajzolás a síkot tartományokra osztja, lesz egy végtelen tartomány (külső tartomány).

**Gömbre rajzolhatóság:**

* A gömbre rajzoláson lényegében ugyanezt értjük, csak sík helyett a gömb feszínén dolgozunk, és külső tartományról nem beszélünk.

**Tartomány:**

* A síkbarajzolható gráf diagrammjának olyan területe, amelyet élek határolnak.
* Végtelen tartomány (külső tartomány)

**Külső tartomány nem kitüntetett volta:**

* A külső tartomány ugyanolyan, mint a többi tartomány.
* Úgy lehet elképzelni, hogy megcsináljuk a Gráf gömbrerajzolását, és a gömbön már nincs külső, meg belső tartomány, csak sima tartományok vannak, ugyanis a gömb felülete véges, így az összes tartomány belső tartomány lesz, a külső tartomány fogalma eltűnik.
* Következmény: Egy síkbarajzol gráf, bármely belső tartománya, lehet egy másik síkbarajzolásnál külső tartomány.

**Sztereografikus projekció:**

* **Tétel:** A G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha G gömbre rajzolható. Bizonyítása sztereografikus projekcióval.
* **Sztereografikus projekció:** A gömböt a síkra vetítjük. Ez úgy csináljuk, hogy fogjuk a gömböt és rárakjuk a síkra. A gömb északi pólusából, tehát a legfeljebb lévő pontjából húzunk egyeneseket, amik metszeni fogják a gömböt különböző pontokon és belefúródnak a síkba. Minden ilyen egyenes egy ponton metszi a gömböt, és egy másikban belefúródik a síkba. Tehát azt a pontot, ahol az egyenes metszi a gömböt, azt a pontot vetítjük a síkra. Tulajdonképpen, ha az összes egyenest meghúzzuk és a gömb összes pontját levetítjük a síkra, akkor megkapjuk a gömb képét a síkon. Ezt az eljárást hívjuk sztereografikus projekciónak. Visszafele is érvényes, a síkba rajzolt gráfot meg lehet feleltetni egy gömbre rajzolt gráfnak.
* következmény: tetszőleges konvex poliéder élhálója síkba rajzolható

**Tétel:** G síkbarajzolt gráf, akkor n+t=e+k+1, ahol n a pontok, t a tartományok, e az élek, k pedig a komponensek száma. Ennek a következménye az Euler-formula.

**Eulerféle poliéderit tétele és következményei:**

* Tétel: adott egy konvex poliéder, aminek e éle, l lapja, c csúcsa van. Ekkor c+l=e+2 pl: kocka
* Tétel: Ha egy összefüggő, n pontú, e élű gráf t tartománnyal síkbarajzolható, akkor n+t=e+2
  + Bizonyítás: Ha G öf, akkor k=1, tehát az előző tétel szerint n+t=e+k+1=e+1+1=e+2
* Következményei:
  + Ha G síkbarajzolható, akkor bármely síkbarajzolásának ugyanannyi tartomány van.
  + Ha G egyszerű, legalább 3 pontú, síkbarajzolható gráf, akkor e3n-6.
    - biz:
  + Sem , sem nem síkbarajzolható.
* **Tétel:** Ha G egy egyszerű, síkbarajzolható gráf és minden körének hossza legalább 4, továbbá pontjainak száma is legalább 4, akkor e ≤ 2n – 4. Itt is e az élek száma, n a csúcsok száma a G gráfban.

Egyszerű, síkba rajzolható gráfokon felső korlát az élszámra

* bizonyítás:

**Kuratowski gráfok:**

* Definíció. A K5 és a K3,3 gráfokat Kuratowski-gráfoknak nevezzük. A K5 az 5 pontú teljes gráf. A K3,3 gráfot szokás három ház – három kút gráfnak is nevezni. Az elnevezés onnan ered, hogy a gráf csúcsai olyanok, mint három ház és (velük szemben) három kút. Az élei pedig az utak, melyek minden házat összekötnek minden kúttal. Láthatjuk, hogy az utakat kereszteződések nélkül nem lehet lerajzolni. Tehát a gráfban lesznek egymást keresztező élek. Azt, hogy a K3,3 és a K5 esetében sem lehet az éleket kereszteződés nélkül lerajzolni a síkba.

Síkbarajzolhatósága

* A kuratowski gráfok nem rajzolhatók síkba.
* Bizonyítás: A K3,3 minden körének hossza legalább 4, mert K3,3 páros gráf. Ezért ha K3,3 síkbarajzolható lenne, akkor teljesülnie kellene rá a 2.4. Tételnek. Azonban a K3,3 pontjainak száma 6, éleinek száma 9 és ez ellentmond az e ≤ 2n – 4 –nek, ugyanis 9 > 8. Tehát a K3,3 nem síkbarajzolható.
* Bizonyítása: Indirekt tegyük fel, hogy a K5 síkbarajzolható. Ekkor teljesül rá e3n-6 Tétel. : n=5, e=10 -> 103\*5-6 -> ellentmondás

**Soros bővítés:**

H és G gráf topologikusan izomorfak, ha G megkapható H-ból ezt a két lépést ismételve:

1. Töröljük a gráf uv élét, és beveszünk egy új másodfokú csúcsot, aminek a szomszédjai u és v.(egy élt kettéosztunk egy ponttal) (soros bővítés)
2. törlünk egy másodfokú csúcsot, és egy éllel összekötjük a két szomszédját.

Topologikus izomorfia nem befolyásolja a síkbarajzolhatóságot.

Kuratowski tétel könnyű irány

* Tétel: G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz -el, vagy -al topologikusan izomorf gráfot.
* Könnyű iránya:
  + bizonyítás: